

고등학생을 위한 프랙털 현상 실험 : 금-알루미늄 합금의 프랙털 형성

박성태¹, 전동렬^{2*}

¹배명고등학교, 서울특별시 138-841

^{2*}서울대학교 물리교육과, 서울특별시 151-742

Guided Inquiry of Fractal Phenomenon for High School Students: Au-Al Fractal Surface Alloy Growth

S. T. Park¹ and D. Jeon^{2*}

¹Bae-Myeong High School, Seoul 138-841, Korea

^{2*}Department of Physics Education, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea

요 약

자연계에 존재하는 많은 물체들은 프랙털 특징을 가지고 있다. 비가역적 변화가 일어날 때 많은 물체들이 프랙털 형상으로 응집하거나 성장하지만, 프랙털 개념은 널리 알려져 있지 않다. 한편 중고등학교 과학 서적에는 프랙털이 무엇인지에 대한 설명은 없이 나뭇가지나 눈꽃송이 등의 간단한 사진으로만 소개되고 있다. 이 논문에서는 간단한 장치를 이용하여 금 박막과 알루미늄 박막이 녹아서 합금을 만들 때 표면에서 일어나는 프랙털 응집 현상을 학생들에게 직접 보여줄 수 있는 방법을 제안한다. 알루미늄 포일 위에 금을 얇은 박막으로 증착하여 200℃ 정도의 낮은 온도로 가열하면 표면에서 금-알루미늄 합금이 프랙털 형태로 서서히 성장하는 것을 광학 현미경으로 쉽게 관찰할 수 있다. 현미경에 카메라를 장착하여 프랙털 성장과정을 영상자료로 기록할 수도 있고 저장한 사진을 이용하여 컴퓨터 프로그램을 통해 프랙털 차원을 계산할 수도 있다. 이와 같은 방법으로 제작된 시각 자료는 프랙털 성장에 관한 흥미로운 사례로서 수업 시간에 활용될 수 있을 것이다.

주제어 : 프랙털, 프랙털 차원, 프랙털 성장, 확산제한 응집 모형, 용융 합금

서 론

프랙털이란 무엇인가

나뭇가지가 나무 전체의 형상을 닮은 것처럼, 도형의 일부가 도형의 전체의 모양을 닮은 경우, 우리는 그 도형이 ‘자기 유사성’을 갖는다고 말한다. 프랑스의 과학자 베노이트 만델브로트(Mandelbrot)는 1975년에 이러한 자기유사성을 가지는 기하학적 도형을 ‘프랙털(fractal)’이라 명명하였다(Mandelbrot, 1982). 자기유사성의 정도에 따라 프랙털은 세 가지로 분류된다. 수학

적으로 완전한 자기유사성을 갖는 도형을 수학적 프랙털 또는 완전 자기유사(Exact self-similarity) 프랙털이라 하고, 확대 비율에 따라 유사한 정도가 달라지는 것을 반(半, Quasi)자기유사 프랙털, 자기유사성이 상당히 약화된 것은 통계적 프랙털 또는 불규칙 프랙털이라 한다. 나뭇가지나 해안선의 모양, 하천의 분포 등, 자연계에 존재하는 대부분의 형상은 통계적 프랙털에 해당한다. 그림 1은 고사리 모양의 완전 자기유사 프랙털을 보여준다.

임의의 공간에 있는 하나의 점의 위치를 나타내기 위해 필요한 좌표의 개수를 그 공간의 차원이라 정의한다. 이러한 정의에 따라 우리는 선형의 공간을 1차원, 면을 2차원 등으로 규정한다. 유클리드 기하학에 따르면 모든 도형은 정수 차원을 가

*교신저자: jeon@snu.ac.kr

•2009년 5월 20일 접수, 2009년 7월 24일 수정, 2009년 8월 4일 통과.

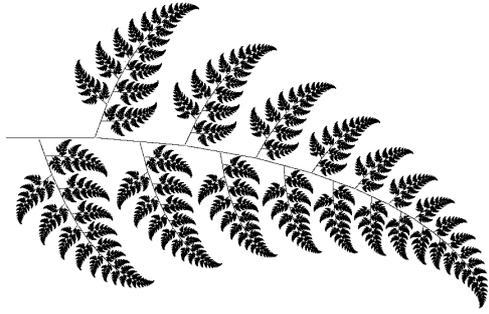


그림 1. 고사리 모양의 완전 자기유사 프랙털.

진다. 하지만 프랙털은 소수의 차원을 가진다. 예를 들어, 해안선은 1과 2 사이의 소수 차원을 가진다. 언뜻 보기에는 해안선은 1차원의 선으로 보인다. 그러나 해안선을 작은 스케일에서 관찰할수록 해안선의 전체 길이는 점점 증가하게 되는데, 만일 해안선이 무한히 반복되는 프랙털 구조를 가진다면 해안선의 실제 길이는 무한대로 수렴하게 된다. 즉, 유한한 1차원상의 너비 속에 무한한 길이의 선이 포함되므로 해안선은 유클리드 기하학에서 정의하는 1차원이라 할 수 없다. 해안선과 같이 선으로 구성된 프랙털은 1과 2 사이의 소수차원을 가지며, 울퉁불퉁한 지표면과 같이 면으로 구성된 프랙털은 2와 3 사이의 소수차원을 가진다.

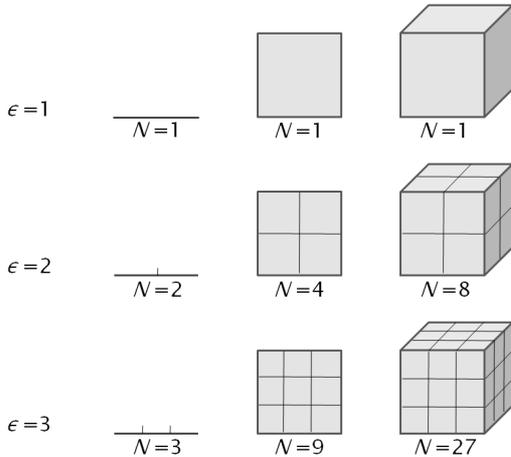


그림 2. 상자-셈 차원 계산을 위한 상자 갯수(N) 셈 방법.

프랙털 차원 계산법

독일의 수학자 하우스도르프(Hausdorff)는 프랙털과 같은 자기 유사 도형에 적용할 수 있는 새로운 방식의 차원 분석법

을 제안하였다. 이에 민코브스키(Minkowski)는 하우스도르프의 차원 개념을 더욱 쉽고 대중적인 ‘격자 셈 차원 (box-counting dimension)’ 이라는 개념으로 설명해주었다. 그에 의하면 그림 2와 같이 변의 길이가 1인 직선, 정사각형, 정육면체 등에 한 변의 길이가 $1/\epsilon$ 인 정사각형 또는 정육면체 등의 격자를 채워 넣을 때, 도형이 포함하는 격자의 개수를 $N(\epsilon)$ 이라 하면 도형의 차원 D 와 ϵ 사이의 관계는 식(1)과 같다.

$$N(\epsilon) = \epsilon^D, \quad D = \frac{\log N(\epsilon)}{\log(\epsilon)} \quad (1)$$

격자의 한 변의 길이가 $1/\epsilon$ 배가 되었을 때 도형 내부에 들어가는 격자의 개수가 ϵ^D 배가 된다면, 이 도형의 차원은 D 라는 것이다. 이러한 관계식을 적용하여 그림 2처럼 정사각형과 정육면체의 차원을 계산해보면 각각 2와 3이 나온다. 이러한 개념을 일반화한 것이 격자 셈 차원이다. 식(2)는 격자 셈 차원 계산 방법을 나타낸다(Schroeder, 1991). 격자 셈 방법으로 자연에 존재하는 통계적 프랙털 차원을 계산하면, 영국의 해안선의 차원은 1.2이고, 우리 식단에 자주 오르는 브로콜리는 2.66, 인간의 대뇌 표면은 2.79이다.

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(\epsilon)} \quad (2)$$

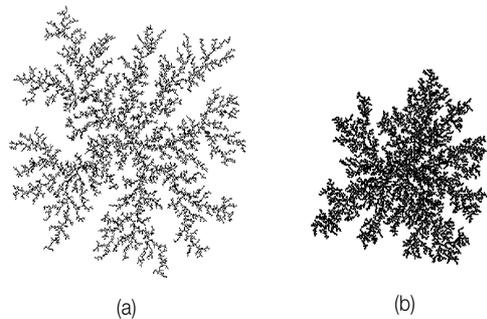


그림 3. (a) DLA 클러스터 (b) RLA 클러스터 (반응 확률 = 0.1).

금-알루미늄 합금 프랙털

우리의 연구에서는 고사리처럼 나뭇가지 모양의 결정 (수지 형태, dendrite) 구조를 이루는 프랙털인 금과 알루미늄 합금의 성장을 관찰했다. 수지상 결정이란 눈꽃이나 성에처럼 여러 갈래의 가지치기를 거듭하며 성장하는 결정을 말한다. 1981년에 위튼과 샌더는 수지상 결정의 형성과정을 설명하기 위해 확산

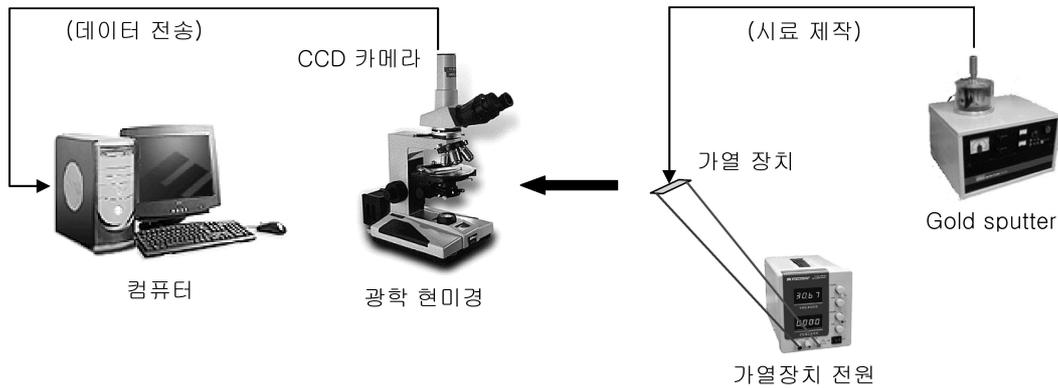


그림 4. 합금 박막의 프랙털 성장 실험 장치 구성도.

제한 응집(diffusion-limited aggregation, DLA) 모델을 제안하였다(Witten and Sander, 1981). 이는 브라운 운동처럼 무작위 운동을 하던 입자가 응결핵이나 응결된 가지에 충돌하면 위치가 고정된다는 단순한 원리에 의해 복잡한 형태의 프랙털이 형성된다는 이론이다. 앞에서 소개한 프랙털 차원 계산 방법에 따르면 확산제한 응집 모형에 (DLA 모형) 의해 만들어지는 프랙털 형상의 차원은 1.71이다. DLA 모형에서는 무작위 운동을 하던 입자가 수지상 결정에 충돌하였을 때, 결정에 흡착될 확률이 1.0이다. DLA 모형에서는 입자가 응결핵이나 가지에 충돌했을 때 100% 응결하는데 비해, 반응제한 모형(reaction limited aggregation, RLA)은 입자들이 응결핵이나 가지에 충돌했을 때 반응이 일어나는 확률이 1 보다 작다(Paul and Fereydoon, 1987). 흡착 반응 확률이 낮아질수록 수지상 결정은 가지의 모양이 뭉뚱해지고 프랙털 차원은 2에 접근하게 된다. 그림 3(a)는 2만 5천개의 입자를 이용하여 DLA 모형에 따라, 3(b)는 반응확률을 0.1로 한 RLA 모형에 따라 시행한 컴퓨터 시뮬레이션이다. 반응확률이 0.1이면 10번을 부딪쳐야 반응하므로 입자가 반응할 때까지 많이 이동할 수 있어 DLA에 비해 안쪽이 꼭 찬 형체가 만들어진다.

이 연구에서 우리는 알루미늄 박막에 금 박막을 입히고 가열하면 금-알루미늄의 용융 합금이 수지상 프랙털 형태로 성장한다는 것을 발견하였다. 우리가 사용한 실험 장치는 매우 간단하므로 고등학교에서도 쉽게 이와 같은 장치를 만들어 프랙털 현상을 실시간으로 관찰할 수 있을 것이다. 용융 합금은 금-알루미늄 외에도 대단히 많은 사례가 있으므로 고가의 금을 사용하지 않고도 이 실험을 할 수 있다.

장 치

전체 장치 개략도

그림 4는 전체 장치 구성을 보여준다. 전열기를 이용하여 시료를 가열하고, 시료 표면의 변화를 광학현미경과 CCD 카메라, 컴퓨터 등을 이용하여 관측하고 기록한다.

가열 장치

실리콘 웨이퍼는 금속보다 저항이 크므로 좋은 가열장치 재료다(그림 5). 두께 1 mm의 실리콘 웨이퍼를 가로 45 mm, 세로 10 mm의 규격으로 절단하고 양단에 전극을 연결하였다. 전극에서의 접촉 저항을 작게 하기 위해 저항체의 양단에 10 mm 너비의 정사각형 판상의 전극을 나사로 눌러 접촉시켰다. 이때 접촉면 사이에 간극이 없도록 알루미늄 포일을 말아서 끼워 넣었다.

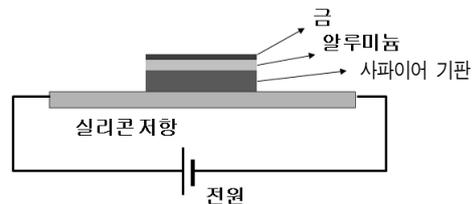


그림 5. 실리콘 전열 장치 구성도.

시료 제작

두께 1 mm, 가로와 세로 각 5 mm의 사파이어 판을 기판으

로 사용하였다. 먼저 기관 위에 열증착기(thermal evaporator)를 사용하여 알루미늄을 승화시켜 시료 위에 증착시켰다. 알루미늄이 너무 얇으면 기관 표면과 금이 상호작용을 하게 되고, 지나치게 두껍게 증착되면 알루미늄의 표면이 거칠어지기 때문에 알루미늄의 두께를 1 μm 정도로 코팅하는 것이 적당하다. 그리고 그 위에 금 박막을 증착하였으며 금의 두께는 대략 수백에서 수천 \AA 으로 바꾸면서 실험하였다.

실 험

온도가 프랙털 성장에 미치는 영향을 분석하기 위해서 시료마다 성장 온도를 다르게 하여 프랙털의 성장을 관측하였다. 미리 가열하여 온도가 유지되고 있는 가열 장치에 시료를 올려놓고 광학 현미경으로 실시간 분석하였다.

반응이 종료된 시료의 표면은 주사 탐침 현미경(scanning probe microscope)을 이용하여 표면상의 단차를 측정하였으며 오제 전자 분광(auger electron spectroscopy)을 이용하여 표면의 성분을 분석하였다.

실험 결과를 확산제한 응집 모델 또는 반응제한 응집 모델과 비교하기 위해 프랙털 차원 분석 프로그램을 이용하였다. 확산 제한 응집 모형에서는 반응율에 따라 프랙털 차원이 달라진다. 가열 온도에 따른 프랙털 차원을 구하고 이것을 모형과 비교함으로써 온도와 반응율 사이의 상관관계를 가늠해볼 수 있다.

그리고 온도 상승 속도 및 금박막의 두께 등을 변화시켜가며 프랙털 성장이 어떻게 달라지는지를 관찰하였다. 금의 두께가 두꺼워질수록 금과 알루미늄의 반응은 표면이 아닌 덩이의 내부에서 일어나게 된다. 따라서 이는 성장핵의 형성과 프랙털 가지 형성에 영향을 미치게 된다. 증착된 금의 두께를 다르게 하고 다른 조건을 동일하게 설정하여 실험하였다.

결과 및 논의

합금 프랙털 성장의 현미경 관찰

가열하기 전의 시료는 표면에 증착된 금으로 인해 광택이 있는 노란색을 띤다. 가열하는 동안 시료 색상은 보라색으로 변화한다. 이것을 육안으로 관찰하면 시료 표면 색상의 변화가 서서히 점진적으로 일어난다. 그러나 이것을 광학 현미경으로 관찰하면 색상의 변화는 점진적이지 않으며 임의의 점에서 표면의 색은 노란색에서 회색으로, 회색에서 짙은 보라색으로 급

히 변화한다. 육안으로 관찰시 색상 변화가 점진적인 이유는 짙은 보라색을 띤 영역이 점진적으로 증가하기 때문이다.

그림 6은 가열 중인 시료를 광학 현미경으로 동영상을 찍고 시간 순서대로 사진을 캡처한 것이다. 이 시료에 증착된 금의 두께는 약 700 \AA (타원편광분석 장치를 통해 측정한 두께는 694 \AA)이다. 짙은 보라색 무늬가 점진적으로 성장하는 것을 볼 수 있다. 그림 7은 대부분의 성장핵이 초기에 형성되는 것을 보여준다. 초기에 형성된 몇 개의 성장핵을 중심으로 가지치기 성장을 한다. 반응 중간에 시료를 냉각시켜도 한번 만들어진 보라색 영역은 그 모양이 변하거나 없어지지 않았다.

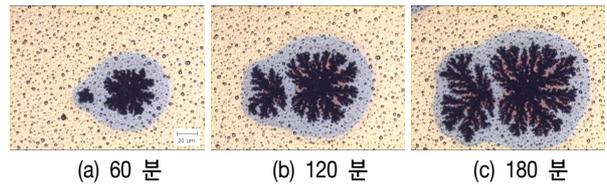


그림 6. 광학 현미경을 이용한 프랙털 성장의 관찰. 시료를 가열하며 실시간 영상을 촬영하였다. 금의 증착 두께는 694 \AA 이고 가열 온도는 250 $^{\circ}\text{C}$ 이다.

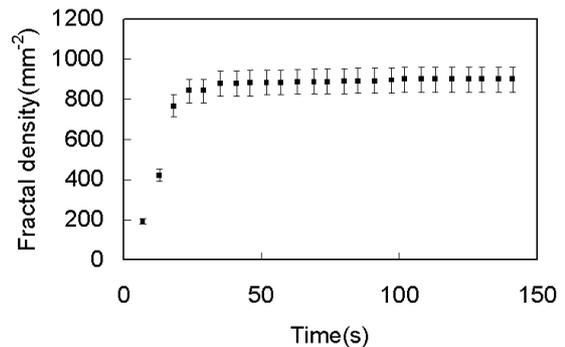


그림 7. 프랙털 밀도(단위 면적당 성장핵의 개수)의 시간 변화. 대부분의 성장핵은 반응 초기에 등장한다. 성장핵의 최종 개수를 늘리기 위해 금을 얇은 두께(300 \AA)로 금을 증착하고, 시간 변화율을 높이기 위하여 높은 온도(350 $^{\circ}\text{C}$)에서 가열하였다.

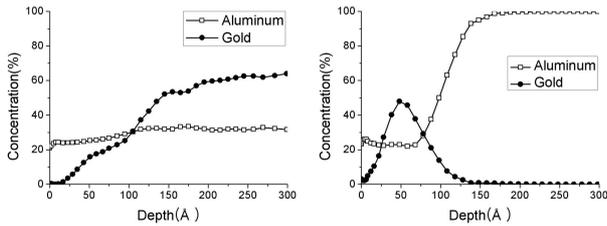
표면 생성 물질의 성분 분석

(이 부분은 고등학교 실험에서는 다루지 않아도 됨) 표 1과 그림 8은 오제 전자 분광기로 시료의 표면을 분당 12 \AA 씩(알루미늄 기준) 벗겨내며 보라색 영역(a)과 그 주변부인 회색 영역(b)의 성분을 분석한 결과이다. 이를 통해 보라색 영역(그림

6에서 프랙털 모양의 짙은 색 부분)은 금과 알루미늄이 섞여 있는 합금임을 확인하였다. 회색 영역에는 표면에 금이 존재하긴 하지만 시료 제작시의 두께에 비해 매우 적은 양만이 남아 있음을 볼 수 있다. 그림 9는 반응이 종료된 시료 표면의 주사 탐침 현미경(scanning probe microscope) 사진이다. 보라색 영역에 해당하는 곳의 단차가 비교적 높은 것을 확인할 수 있다. 이것으로 미루어 볼 때, 무작위로 열운동을 하던 금 입자가 먼저 만들어진 보라색의 합금과 충돌함으로써 합금 형성 반응을 일으키게 되고, 생성된 보라색 합금이 그 자리에 고착됨으로써 표면합금의 프랙털 성장이 일어나는 것임을 알 수 있다.

표 1. 300℃에서 30 분간 가열 후 보라색 영역과 회색 영역에 대해서 오제 전자 분광기를 이용하여 깊이 250 Å 지점의 성분 분석 결과.

원소	가열된 시료의 보라색 영역		가열된 시료의 회색 영역	
	Au	Al	Au	Al
성분 비율(%)	66.1	29.3	0.11	98.7



(a) 보라색(프랙털) 영역

(b) 회색 영역

그림 8. 오제 전자 분광기를 이용한 표면 성분 분석자료. 표면을 깎아가며 성분을 분석하였으며 깎아내는 속도는 알루미늄을 기준으로 분당 12 Å이다. 보라색 영역에서는 대략 200 Å 이하의 깊이에서 금과 알루미늄이 일정한 비율로 섞여 있다. 반면 회색 영역에서는 150 Å 이하의 깊이에서는 알루미늄만 있으며 금은 표면에 수십 Å의 두께로 얇게 덮여있다.

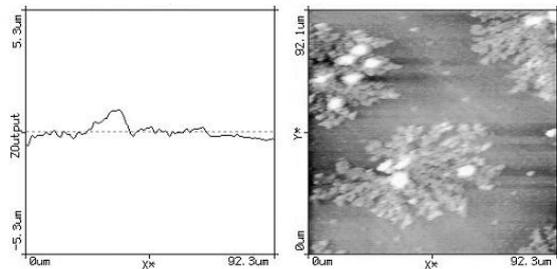


그림 9. 주사 탐침 현미경으로 프랙털이 생긴 부분을 찍은 사진. 합금이 형성된 부분의 높이가 주변보다 높다.

프랙털 밀도와 프랙털 차원

그림 10은 250, 300, 350, 400℃의 온도에서 시료를 가열하며 합금의 성장을 관측한 결과이다. 온도와 단위면적당 성장핵의 개수 (이하 프랙털 밀도) 사이에는 멱함수 관계가 존재하며 높은 온도에서 가열한 시료일수록 프랙털 밀도가 크다(Bruce Chalmers, 1959). 그림 11과 표 2는 서로 다른 온도 조건에서 충분히 오랜 시간동안 성장시킨 프랙털의 개략적 모양과 평균 크기를 보여준다. 가열온도가 낮을수록 프랙털 밀도는 작다. 반응에 참여하는 입자의 개수는 한정되어 있으므로 밀도가 낮을수록 성장핵 한 개당 배당된 입자의 개수는 증가하여, 크기가 크고 잔가지가 잘 발달된, 프랙털 차원 값이 작은 프랙털이 생성된다.

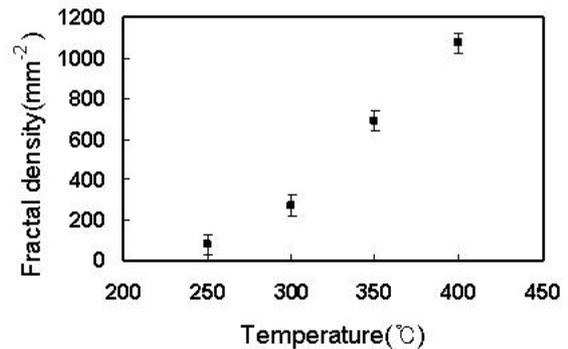


그림 10. 온도와 프랙털 밀도의 상관관계(금 박막의 두께: 300 Å).

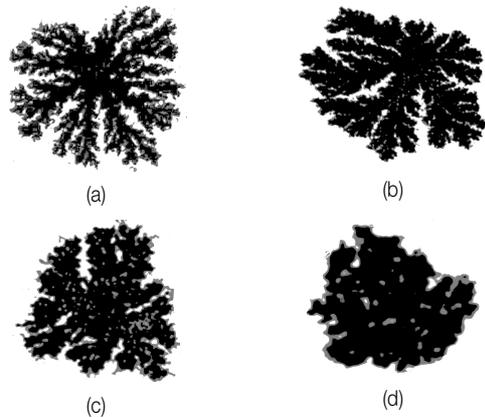


그림 11. 서로 다른 온도에서 시료의 표면 변화가 없을 때까지 충분히 가열하였을 때 관측된 프랙털의 최종 모양. (a) 250℃, (b) 300℃, (c) 350℃, (d) 400℃.

표 2. 온도와 프랙털 차원 및 반경의 관계.

온도(°c)	250	300	350	400
프랙털 차원	1.84	1.86	1.87	1.90
프랙털 지름(μm)	124	95	54	28

금의 증착 두께를 달리하면서 같은 방식으로 실험을 반복하였다. 그림 12는 금의 증착 두께에 따른 프랙털 밀도(1 mm^2 당 성장핵의 개수)의 변화를 나타낸다. 금 박막의 두께가 두꺼울수록 프랙털 밀도는 감소한다. 이는 금의 두께가 두꺼워질수록 표면 박막의 특성을 잃게 되어 자발적인 합금형성이 잘 일어나지 않음을 보여준다. 즉, 금 입자가 표면에서 자유롭게 움직이다가 알루미늄 입자와 충돌할 때 합금 형성이 보다 쉽게 됨을 의미한다.

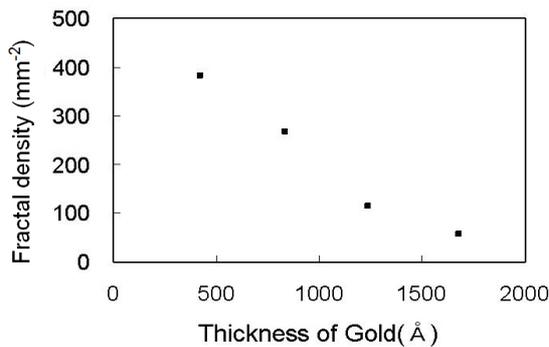
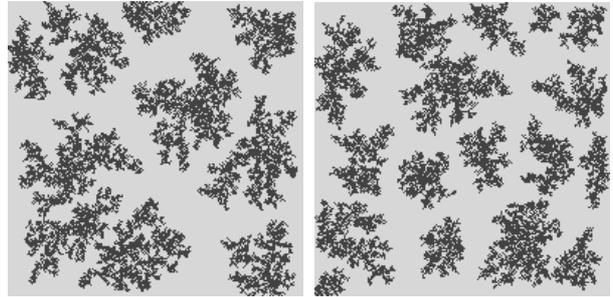


그림 12. 금 증착 두께와 프랙털 밀도의 상관관계(가열 온도: 300°C).

요약 및 결론

실험 결과를 요약하면 다음과 같다.

- 1) 금과 알루미늄 입자 중에서 극히 일부가 자발적으로 금-알루미늄 합금을 형성하면 이것이 성장핵 역할을 한다. 성장핵의 생성확률은 온도가 조금만 높아져도 크게 증가한다.
- 2) 나머지 입자들은 앞서 형성된 합금에 충돌함으로써 합금 형성이 연쇄적으로 유도된다. 합금에 충돌할 때 합금으로 전이될 확률은 낮은 온도에서도 매우 크다.
- 3) 무작위 운동과 충돌, 연쇄적 합금 유도 반응을 통해 표면에서 금-알루미늄 합금이 프랙털 모양으로 성장한다. 이는 DLA 모형, RLA 모형을 적용하여 설명할 수 있다.



(a) (b)

그림 13. RLA 프랙털 시뮬레이션. (a) 금 입자 12000개, 핵형성 확률 1/100, 차원 값 1.68 ; (b) 금 입자 12000개, 핵형성 확률 1/50, 프랙털 차원 값 1.67.

이 실험에서는 온도에 따라서 프랙털 밀도 값이 달라진다는 사실도 확인할 수 있었다. 높은 온도에서는 자발적 핵형성 확률이 높아지기 때문에 프랙털 밀도가 증가하게 된다(그림 10). 이 때문에 온도가 높을 때에는 금 입자들이 여러 개의 프랙털에 분배되기 때문에 충분히 가지치기 성장을 할 수 없어서 프랙털의 모양이 섬세하지 못하게 되고 차원 값도 커지게 된다. 프랙털 성장핵의 개수와 입자의 개수를 설정하는 DLA 시뮬레이션을 통해 금-알루미늄 합금의 프랙털 성장 시뮬레이션을 해 볼 수 있다. 그림 13은 RLA 모형에 입각한 프랙털 성장 시뮬레이션을 보여준다.

제 언

프랙털 차원 분석 프로그램과 프랙털 성장 시뮬레이션 프로그램이 필요한 독자는 저자들에게서 구할 수 있다. 금-알루미늄 박막 시료는 전문 업체에게 제작을 의뢰하면 된다. 4 인치 실리콘 웨이퍼에 알루미늄과 금을 각각 $1\ \mu\text{m}$, $1000\ \text{\AA}$ 의 두께로 증착하여 가로 세로 5 mm 정도로 절단하면 웨이퍼 한 장당 100개 이상의 시료를 얻을 수 있으므로 적은 비용으로도 충분한 시료를 확보할 수 있다. 이 연구에서는 그림 5에서 보듯이 금과 알루미늄 박막을 사파이어(산화 알루미늄) 기판에 증착했는데, 이것은 산화 알루미늄 열전도율이 크기 때문이지만 실리콘기판에 증착해도 같은 실험 결과를 얻을 수 있다. 만일 사파이어 기판을 사용하고 싶은 교사는 우리에게서 무료로 얻을 수 있다. 실리콘은 저항이 구리 전선보다 크므로 실리콘 웨이퍼 조각에 전류를 흘리면 가열장치로 이용할 수 있다. 실리콘 웨이퍼는 한 장에 3만원 정도 하는데, 실리콘 웨이퍼 한 장으로 금, 알루미늄 증착 기판 뿐 아니라 가열장치도 만들 수 있다.

실험은 온도 변수와 시간 변수를 바꾸면서 프랙털 모양이 어떤 경향을 가지는지 관찰하면 된다. 실험을 정리할 때는 교사가 DLA 모형과 RLA 모형을 설명해주거나 학생들에게 미리 과제로 주어 발표하도록 한다. 또는 프랙털 이론을 기반으로 관찰 사실에 대해 토론하거나 프랙털 성장 시뮬레이션을 실시하고 실험 데이터와 비교한다.

학생들은 합금 박막의 프랙털 성장 실험을 통해 프랙털 구조의 분석, 컴퓨터 시뮬레이션, 자연에 나타나는 프랙털 현상 등 프랙털과 관계된 전반적인 이론과 자연 현상을 이해할 수 있다. 또한 컴퓨터로 프랙털 성장을 모사 실험한 결과와 실제 합금 박막의 모양을 비교하여 프랙털 성장 모형에서 예측한 프랙털 차원과 비교하면 좋다. 이런 활동을 통해 학생들은 프랙털 현상에 대한 이해를 도모할 수 있고 물질 입자의 열운동과 표면 입자의 물리적 성질에 대한 폭 넓은 이론 공부를 할 수 있다.

이 논문에 제시된 실험 방법과 실험 결과를 담은 영상물이 학교에 보급되어 프랙털 성장과 수지상 결정 형성에 관심 있는 교사와 학생들이 의미 있는 경험을 하길 바라고, 더 나아가 비가역적 변화와 핵형성에 관한 심화 된 연구의 밑거름이 되길 바란다.

ABSTRACT

Fractal is an interesting and important phenomenon which is

widely found in nature. Contrary to its importance, fractal is introduced in secondary science textbooks by simple pictures of tree branches or snow crystal without proper explanation. Here we show by annealing a binary film of Al-Au at temperatures at about 200°C a fractal shape growth can be easily observed under a microscope in real time. The paper describes a simple introduction on fractal phenomenon aggregation for high school students and how to make a simple heater for the Au-Al fractal observation.

Key words: fractal, fractal dimension, fractal aggregation, diffusion-limited aggregation, eutectic alloy

참고문헌

- Bruce Chalmers (1959) Physical Metallurgy, John Wiley & Sons, 71-95.
- Mandelbrot BB (1982) The Fractal Geometry of Nature. W.H. Freeman and Company.
- Paul Meakin and Fereydoon Family (1987) Phys. Rev. A 36, 5498.
- Schroeder M (1991) Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise. New York: W. H. Freeman, pp. 41-45.
- Witten TA and Sander LM (1981) Phys. Rev. Lett. 47, 1400.