

제작이 쉬운 정밀 각도기를 이용한 온도에 따른 물의 굴절률의 측정 및 불확도 분석

이옥수¹, 신광문², 강영창², 이성묵², 이재봉³

¹서울과학고등학교, 서울특별시 110-530

²서울대학교 물리교육과, 서울특별시 151-742

³한국교육과정평가원, 서울특별시 100-784

Measurement and uncertainty analysis of refractive index of water as a function of temperature using home-made precision goniometer

Oksu Lee¹, Kwangmoon Shin², Youngchang Kang², Sungmuk Lee² and Jaebong Lee³

¹Seoul Science High School, Seoul 110-530, Korea

²Department of Physics Education, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea

³Korea Institute for Curriculum and Evaluation, Seoul 100-784, Korea

요약

Graphic Art Film 출력을 이용하여 $\pm 0.02^\circ$ 의 분해능(불확도)을 지니는 정밀 각도기를 제작하여 온도에 따른 물의 굴절률 변화를 측정하였다. 측정 결과는 95% 신뢰 수준에서 문헌값과 불확도 범위 내에서 일치하였고, 불확도 값은 $\pm 2 \sim 3 \times 10^{-3}$ 을 지녔다. 본 연구에서 제작한 교육용 정밀 각도기를 학교 실험수업에 활용함으로써 학생들이 손쉽게 정밀하게 유체의 굴절률 측정에 이용할 수 있을 것으로 기대된다.

주제어 : 물의 굴절률, 정밀 각도기, 불확도 분석

서론

역사적으로 순도가 높은 물은 액체의 굴절률을 측정할 때 기준물질로 사용되어 물의 굴절률을 측정하기 위해 다양한 방법이 연구되었다. 물의 굴절률은 파장, 온도 및 밀도에 따라 변하고, 이에 대한 함수 관계도 이미 잘 알려져 있다(Schiebener et al., 1990; Harvey et al., 1998). 특히 온도 변화에 따른 물의 굴절률 변화는 물의 열적인 특성을 연구하는데 꼭 필요한 자료이므로 오랜 시간동안 많은 연구자들의 주목을 받아 왔다. 특히 프라운호퍼(Joseph von Fraunhofer, 1787~1826)는 물의 온도 변화가 물에서의 빛의 굴절에 영향을 준다는 것을 알아내었다(Dale and Gladston, 1858). 프라운호퍼 이래로 약 2세기에

걸쳐서 많은 연구자들이 분광기, 간섭계, 최소편향법(minimum-deviation method)등을 이용해서 온도에 따른 물의 굴절률을 측정하였다(Dale and Gladston, 1858; El-Ghoussein et al., 2006; Richerzhagen, 1996).

대학의 기초물리학 실험에서 가장 많이 사용되는 프리즘 분광기를 이용한 방법은 입사광과 망원경 렌즈를 정확하게 맞추기 위해서 많은 시간과 노력이 요구된다. 만약 이 부분이 충족되지 않는다면 측정 결과의 신뢰도와 정확도는 매우 낮아지게 된다(El-Ghoussein et al, 2006). 간섭계를 이용하는 경우에는 간섭계의 기준선에 대한 보정과 물통(water cell)의 열팽창에 대한 명확한 정보가 필요하다(Richerzhagen, 1996). 최소편향법은 프리즘에 의한 최소편향각을 스크린을 이용해서 측정하는 방법으로 분광기나 간섭계에 비해 비교적 원리가 간단하고 쉬운 방법이지만 비편향된 레이저 광선과 스크린이 수직을 이루

* 교신저자: iwlef@hanmail.net

• 2011년 1월 21일 접수, 2월 18일 수정, 2월 18일 통과

어야 한다는 제약이 따른다(El-Ghoussein et al., 2006).

이러한 기존의 연구 결과에 따르면 $10^{-4} \sim 10^{-6}$ 수준의 불확도로 굴절률을 정밀하고, 정확하게 측정할 수 있다(Schiebener et al., 1990; Daimon and Masumura, 2007). 그러나 측정에 사용되는 기구들이 값이 비싸고 학생들이 재현하기 위해서는 관련이론과 측정방법을 새로 학습해야 하는 단점을 가지고 있다. 본 연구에서는 고등학교에서 굴절률을 측정할 때 가장 보편적으로 사용하는 방법인 반원형 물통에 의한 굴절률 측정 실험을 이용하여 굴절률을 측정하였다. 입사각과 굴절각을 각도기로 측정한 후, 측정된 각도를 스넬의 법칙에 대입함으로써 간단히 매질의 굴절률을 계산할 수 있다. 그러나 온도에 따른 물의 굴절률을 측정하기 위해서는 보다 정밀한 수준의 측정이 요구되므로 실험 기구를 개선해야 한다. 이를 위해 각도기에 어미자와 아들자 개념을 적용하여 각도기 눈금의 분해능을 높여 측정의 정밀도를 향상시켰으며, 불확도를 계산하는 과정을 통해 물의 굴절률 측정에서 불확도에 영향을 미치는 요인에 대해 분석해 보았다.

장치 및 실험방법

온도에 따른 물의 굴절률 측정에 요구되는 측정기구의 정밀

도를 조사하기 위하여, NIST(National Institute of Standards and Technology)의 Harvey et al.(1998)의 측정결과를 살펴보았다. Harvey et al.(1998)에 의하면, 대기압 하에서 파장 632.8 nm에 대하여 20 ℃ ~ 50 ℃까지의 온도 범위에서 물의 굴절률은 3.97×10^{-3} (크기 작계)만큼 변한다. 이러한 물의 굴절률 변화를 측정하기 위해서는 굴절률에 대해 1×10^{-3} 수준의 정밀도가 필요하다. 특히 동일한 온도에서도 굴절각의 크기에 따라 입사각의 크기가 다르기 때문에, 굴절각을 30°로 고정했을 때, 5 ℃간격으로 물의 굴절률 변화를 측정해내기 위해 최소눈금 0.02°를 지나는 각도기가 필요하다.

시중에 판매되는 정밀각도기의 가격은 10만 원 이상으로 값이 비싸며, 정밀도는 0.05°~0.01° 정도 수준이다. 또한 이들의 모양은 한정적이기 때문에 사용자의 요구에 따라 주문 제작이 필요한 경우가 대부분이다. 본 연구에서는 Graphic Art Film 용지를 사용하여 $\pm 0.02^\circ$ 의 정밀도를 지니며 온도에 따른 물의 굴절률을 측정하기에 적합한 형태의 정밀각도기를 제작하였다. Graphic Art Film은 인쇄물 제작 시 색분해(color separation) 원본으로 사용되는 것으로 일반적인 인쇄물에 비해 해상도가 높다. Graphic Art Film은 컴퓨터에서 직접 필름에 출력하는 방식을 사용한다. 보통 인쇄물 원판 출력은 인쇄하는 업체에 인터넷을 이용하여 주문하면 인쇄하여 우편을 통해 받

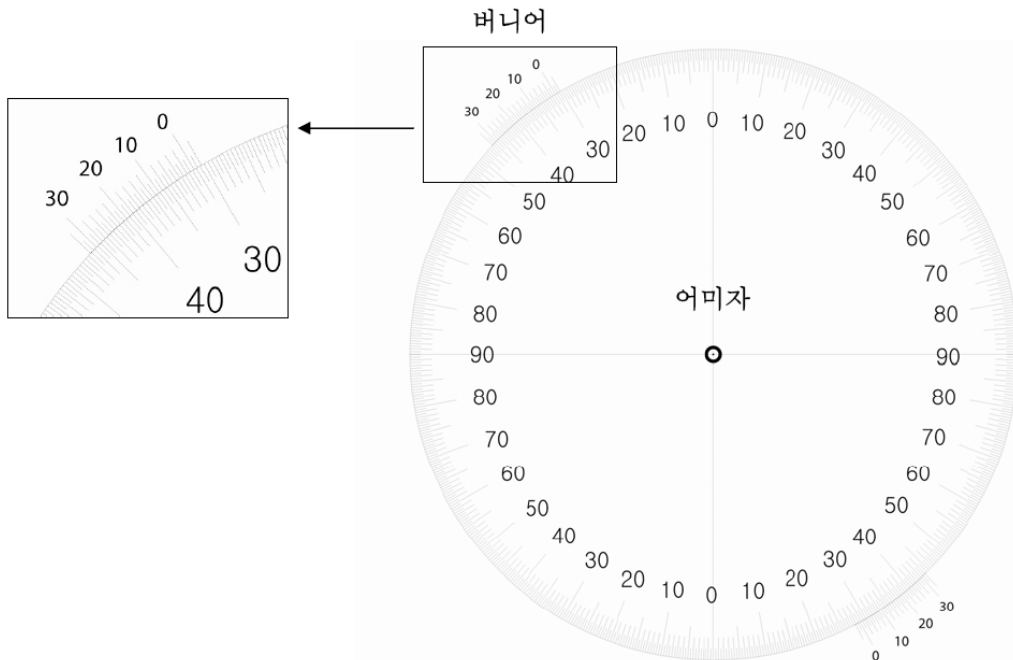


그림 1. 정밀 각도기. 어미자의 중심을 축으로 버니어가 회전할 수 있도록 하였다.

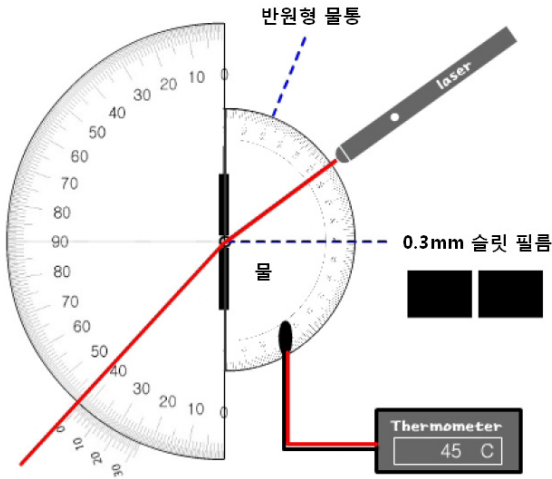


그림 2. 실험 장치

을 수 있다. 먼저 그래픽 프로그램에서 그린 슬릿을 파일로 저장하고, 이것을 그래픽 필름을 출력하는 업체에 파일을 보내서 출력하면 된다.

제작한 정밀각도기는 그림 1과 같이 버니어스케일(vernier scale)을 적용하여 분해능을 일반각도기의 25배인 0.02°까지 정밀도를 높였으며, 어미자의 중심을 기준으로 버니어(아들자)가 회전할 수 있도록 하였다. 어미자와 버니어 모두 컴퓨터그래픽 프로그램인 Adobe Illustrator의 원형그리드 툴(polar grid tool)을 이용하여 설계하였다. 어미자는 지름 180 mm 크기의 원 내

에 360°를 720개의 등분선으로 나누어 최소눈금이 0.5°가 되도록 제작하였다. 눈금의 두께는 모두 동일하고 길이를 달리하여 0.5°, 1°, 5°, 10°를 각각 구분할 수 있도록 하였다. 버니어는 내부지름이 180 mm, 외부지름이 195 mm이며, 14.4°를 30개의 등분선으로 나누어서 최소눈금은 0.48°이었다. 제작된 정밀각도기의 분해능은 어미자와 버니어의 최소눈금의 차이에 해당하는 ±0.02°이다.

실험에 사용된 기구는 가장 많이 사용되는 반원형 물통(지름: 120 mm, 아크릴 소재)과 레이저포인터(파장: 632.8 nm, 출력: 1 mW), 정밀각도기(지름: 180 mm, 정밀도: ±0.02°), 온도 센서와 디지털 멀티미터(온도계의 정밀도: ±(3.0% of reading))이다. 물에 기체가 포함되어 있으면 굴절률이 영향을 받게 되므로 물은 2차례 끓여서 기체가 없는 상태로 실험을 하였다.

실험 장치는 그림 2와 같이 설치하였다. 물통(아크릴)에 의한 굴절효과를 제거하기 위해서 반원형 물통의 편평한 부분의 가운데 지점을 일부 잘라낸 후에 Graphic Art film 용지에 출력한 폭이 0.3 mm인 슬릿을 붙였다. 레이저 빔 자체의 두께(1.6 mm)로 인한 측정 불확도를 줄이기 위해서 물통의 등근 부분에도 폭이 0.3 mm인 슬릿을 붙여서 레이저 빔을 가늘게 만들었다. 정밀각도기와 반원형 물통 밑에는 모눈종이를 깔아서 반복측정에 의한 위치변동을 수시로 점검할 수 있도록 하였다.

측정은 50 °C의 온도에서 시작하여 20 °C까지 5 °C간격으로 7개의 온도에서 이루어졌고, 온도를 일정하게 유지하는 것이

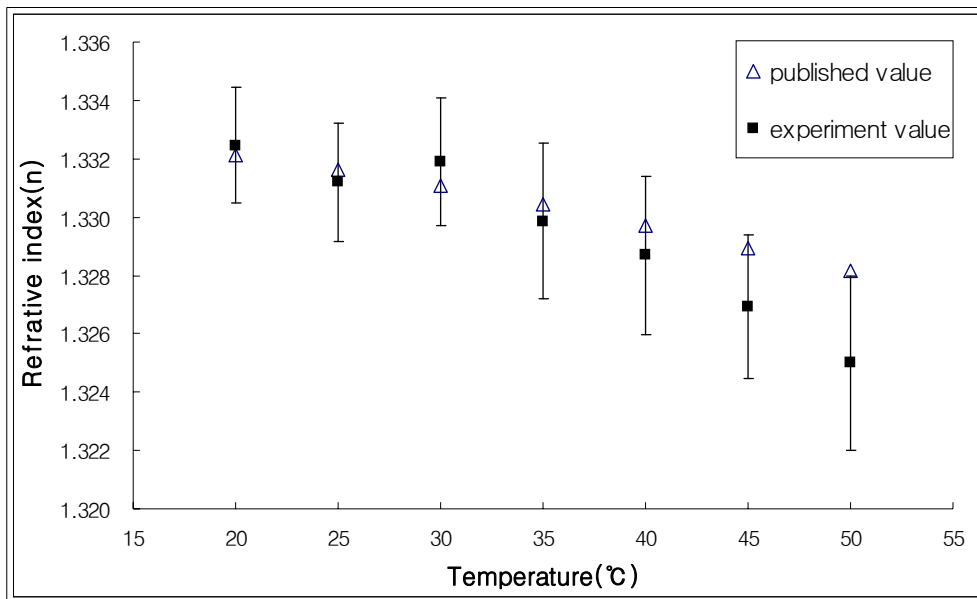


그림 3. 온도에 따른 물의 굴절률과 측정 불확도

어렵기 때문에 온도를 낮추면서 연속적으로 1회 측정을 한 후에, 다시 새로운 뜨거운 물을 반원형 물통에 넣어서 50℃에서 시작하여 5℃간격으로 측정하여 10회 반복 측정하였다.

$$n(T) = n_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \alpha_3 T^3 + \alpha_4 T^4 \quad (2)$$

$$(n_0 = 1.33308, \quad \alpha_1 = -3.38345 \times 10^{-6}, \quad \alpha_2 = -2.55256 \times 10^{-6},$$

$$\alpha_3 = 1.55012 \times 10^{-8}, \quad \alpha_4 = -5.36131 \times 10^{-11})$$

실험 결과 및 논의

측정 결과

20~50℃의 온도와 대기압 하에서 정밀각도기를 이용하여 측정된 공기에 대한 물의 상대굴절률을 절대굴절률로 전환시키기 위해 파장 632.8 nm에 대한 각 온도에서의 공기의 절대굴절률을 측정결과에 곱하였다(Schiebener et al, 1990). 또한 온도에 따른 물의 절대굴절률에 대한 문헌값은 1 기압, 파장 632.8 nm에 대해서 Harvey et al.(1998)이 제시한 것을 사용하였다. 그림 3은 측정 결과와 문헌값 사이의 절대오차와 불확도를 나타낸 것이다.

그림 3의 결과에 따르면, 온도가 높아질수록 오차가 증가하는 것을 볼 수 있다. 이는 높은 온도에서는 물의 온도 변화가 상대적으로 빠르게 변하기 때문이다.

불확도 분석 결과

측정결과에 대한 불확도를 평가 분석하기 위해서 측정의 수학적 모델과 불확도 전파법칙을 이용하였다. 온도에 따른 물의 굴절률에 대한 측정의 수학적 모델은 다음과 같이 각도와 온도의 함수로 표현할 수 있을 것이다(Richerzhagen, 1996).

$$n(\theta) = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} \quad (1)$$

θ_i 는 공기에서의 입사각, θ_r 는 물에서의 굴절각이며, n_0 는 0℃, 1 기압에서 파장 632.8 nm의 빛에 대한 물의 굴절률, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 는 1 기압 하에서 파장이 632.8 nm일 때 상수값들이다.

합성표준불확도는 A형 표준불확도와 B형 표준불확도의 제곱합의 양의 제곱근으로 구한다(International Organization for Standardization, 1995; 한국인정기구 2007). 이때 A형 표준불확도는 일련의 관측값을 통계적으로 분석하여 불확도를 구하는 방법을 말하며, B형 불확도는 일련의 관측값의 통계적인 분석이 아닌 다른 방법으로 불확도를 구하는 방법을 말한다. 이 연구에서는 20~50℃의 온도에서 굴절률을 10회 반복 측정하였으므로 반복 측정에 의한 A형 표준불확도와 각도기와 온도계의 B형 표준불확도가 측정량인 굴절률에 전파된 것을 모두 고려하여 합성표준불확도를 산출하였다. 각도기와 온도계의 B형 표준불확도가 측정량인 굴절률에 전파된 것은 서로 독립인 변수에 의한 불확도 전파법칙을 이용하여 산출하였다(Taylor, 1997). 따라서 굴절률의 합성표준불확도 δn_c 은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\delta n_c = \sqrt{(\delta n_{\text{반복}})^2 + \left[\left(\frac{\partial n}{\partial \theta} \right)^2 (\delta \theta)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial T} \right)^2 (\delta T)^2 \right]} \quad (3)$$

여기에서 $\delta n_{\text{반복}}$ 은 굴절률의 반복 측정으로부터 산출되는 A형 표준불확도이고, $\left(\frac{\partial n}{\partial \theta} \right) \delta \theta$ 는 정밀각도기 자체의 불확도에 의해 굴절률에 전파된 불확도이며, $\left(\frac{\partial n}{\partial T} \right) \delta T$ 는 온도 측정에 사용된 멀티미터의 불확도에 의해 굴절률에 전파된 불확도이다.

표 1은 20℃에서 측정한 물의 굴절률에 대한 성분별 표준불

표 1. 20℃에서 측정한 물의 굴절률의 측정불확도

불확도 요인	불확도 유형	표준불확도	확률분포	적용인자	자유도	굴절률에 전파된 불확도
반복측정	A형	0.269×10^{-3} rad (10회 반복측정)	t 분포	1	9	0.269×10^{-3}
각도기	B형	0.349×10^{-3} rad (최소 눈금 0.02°)	정규분포	1	∞	0.958×10^{-3}
온도계	B형	0.346℃ (3%)	직사각형분포	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	∞	0.031×10^{-3}
굴절률	합성 표준불확도					0.996×10^{-3}
	95% 신뢰수준에서의 확장불확도(k=2)					1.996×10^{-3}

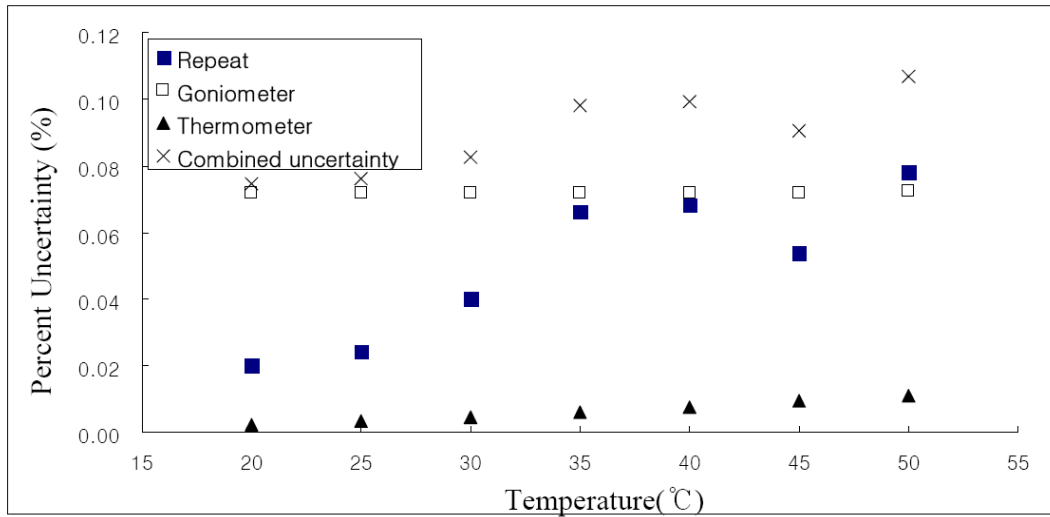


그림 4. 온도에 따른 각각의 불확도 요인의 표준불확도 비교

확도와 불확도 전과법칙을 적용하여 산출한 합성 표준불확도와 확장불확도를 나타낸 것이다.

각 성분별 표준불확도의 계산에서 반복 측정에 의한 표준불확도는 각 온도점에서 10회 측정된 측정값의 표준편차를 구한 후, 그 값을 측정횟수인 10의 제곱근으로 나누어서 구한다. 정밀각도기의 표준불확도는 각도기의 정밀도 $\pm 0.02^\circ$ 를 라디안으로 표현한 값인 0.349×10^{-3} rad이 된다. 온도계로 사용된 멀티미터의 표준불확도는 측정값인 온도의 값에 한계가 정해진 직사각형의 확률분포이므로 $\pm(3.0\% \text{ of reading})/\sqrt{3}$ 으로 계산한다. 확장불확도를 산출할 때 적용한 포함인자(k)는 95% 신뢰수준을 고려하여 2로 정하였다. 표 1에서 알 수 있듯이 불확도 분석결과 본 연구에서 20 °C에서 측정된 물의 굴절률의 측정불확도는 1.996×10^{-3} 이다.

불확도 산출 수식에서 제시했던 세 가지 요인인 반복측정에 의한 표준불확도, 각도기에 의해 전과된 불확도, 온도계에 의해 전과된 불확도가 각각 전체 합성 표준불확도에 어느 정도 기여하였는지를 조사하였다. 그림 4는 각 요인별 상대불확도를 온도에 따라 표현한 것이다.

그림 4에 따르면, 20 ~ 50°C까지의 전 온도 구간에서 각도기의 불확도가 합성 표준불확도의 대부분을 차지하는 것을 확인할 수 있다. 이는 각도기의 정밀도를 개선하면 측정결과와 합성 표준불확도를 줄일 수 있음을 의미한다. 다른 불확도 요소를 유지시키면서 온도에 따른 물의 굴절률을 측정하기 위해 제작한 정밀각도기를 확대 출력하여 사용하고 정밀도를 향상시킨다면 더 정밀한 측정결과 획득이 가능할 것이다.

한편 반복측정에 의한 불확도는 온도가 높아짐에 따라 증가함을 확인할 수 있다. 그 증가량을 살펴보면 다른 요인보다 온도변화에 가장 민감한 것을 알 수 있다. 이는 높은 온도에서 물의 급격한 온도변화로 측정 과정에서의 오차가 많이 발생하였고, 이것이 측정의 불확도를 높인 것이다. 항온 장치를 이용하여 온도를 일정하게 유지하고 안정적으로 측정을 할 수 있다면 반복측정에 의한 불확도를 줄일 수 있을 것이다.

마지막으로 온도계에 의해 전과된 불확도는 온도가 높아짐에 따라 증가하지만 합성 표준불확도에 기여하는 정도는 작음을 확인할 수 있다.

결론

본 연구에서는 Graphic Art Film을 이용한 정밀한 각도기를 만들고, 이를 고등학교에서 이용하는 간단한 굴절률 측정 실험에 적용하여 온도에 따른 물의 굴절률을 측정하였다. 특히 버니어를 이용한 정밀 각도기를 통해 보다 정밀한 수준의 측정이 이루어질 수 있었다. 또한 측정 불확도를 분석해 측정의 한계와 각각의 오차 요인이 굴절률 값에 영향을 미치는 정도를 파악해 보았다.

불확도 분석 결과, 측정이 이루어진 20 ~ 50°C의 온도, 95%($k=2$)의 신뢰수준에서 불확도가 $\pm 2 \sim 3 \times 10^{-3}$ 인 범위 내에서 물의 굴절률을 측정할 수 있었다. 이 측정값의 불확도 범위에 문헌값이 포함되어 있음을 확인할 수 있었으며, 정확도 높은 실험이 수행되었음을 확인할 수 있었다.

이 연구에서 개발한 실험은 고등학생 또는 대학 학부생들이 손쉽게 측정할 수 있는 경제적이고 간단한 실험 장치로서 높은 정밀도와 정확도를 구현할 수 있었다. 특히 단계별 불확도 분석 과정을 통해 각도기의 불확도가 합성 표준불확도에 가장 큰 영향을 주는 요인임을 알 수 있었고, 보다 정밀한 각도기를 인 쇄함으로써 더욱 정밀한 실험을 구현할 수 있음을 확인할 수 있었다. 본 연구에서 제안된 방법은 유체의 굴절률 측정과 같이 정밀도가 요구되는 고등학생이나 학부생 실험에서 다양하게 응용될 수 있을 것이다.

Abstract

We have measured the refractive index of water as a function of temperature with home-made precision goniometer printed in Graphic Art Film having the resolution of $\pm 0.02^\circ$. Experimental results of the refractive index of water in various temperatures agree with the published values and have the uncertainty of $\pm 2 \sim 3 \times 10^{-3}$ within the 95 % confidence interval. By applying the home-made goniometer to experiment class, A student can measure the refractive index of water easily and precisely.

Key words: refractive index of water, precision goniometer, uncertainty analysis

참고문헌

한국인정기구 (2007) 측정결과의 불확도추정 및 표현을 위한 지침.

- Daimon M and Masumura A (2007) Measurement of refractive index of distilled water from the near-infrared region to the ultraviolet region, *Appl. Opt.* 46: 3811-3820.
- Dale TP and Gladston JH (1858) On the influence of temperature on the refraction of light, *Philos. trans. R. Soc. Lond.* 148: 887-894.
- El-Ghoussein F, Wrobel JM, and Kruger MB (2006) Dispersion measurements with minimum and maximum deviated beams, *Am. J. Phys.* 74: 888-891.
- Harvey AH, Gallagher JS and Levelt Sengers JMH (1998) Revised formulation for the refractive index of water and steam as a function of wavelength, temperature and density, *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 27: 761-774
- International Organization for Standardization (1995) Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement.
- Richerzhagen B (1996) Interferometer for measuring the absolute refractive index of liquid water as a function of temperature at 1.064 μm , *Appl. Opt.* 35: 1650-1653
- Schiebener P, Straub J, Levelt Sengers JMH and Gallagher JS (1990) Refractive index of water and steam as function of wavelength, temperature and density, *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 19: 677-717.
- Taylor JR (1997) *An Introduction to Error Analysis: the Study of Uncertainties in Physical Measurements*, University Science Books.